Ответы,решения, указания 5 класс

5.1. Ответ. 13. Решение. Уберем самого правого мальчика. Тогда мальчиков и девочек будет поровну, то есть по 12. Значит, в шеренге стояло 12 + 1 = 13 мальчиков.

5.2. Например: 91 и 64, 73 и 82.

5.3. Наполнить 5-литровую посуду, перелить 3 литра в 3-хлитровую и затем вылить эти три литра. Оставшиеся 2 л из 5-литровой вылить в 3-литровую. Затем вновь наполнить 5-литровую, из которой перелить 1 л в 3-литровую. В большой посудине останется ровно 4 л.

5.4. Ответ: 152 руб. Пусть тетрадь стоит x руб., тогда получим уравнение:

$15x + 72 = 20x - 8, x = 16.$ Тогда у Сергея было 152 рубля.

5.5. Ответ: 4.

Ответы,решения, указания 6 класс

6.1. Ответ. Например: 9 + 6; 8 + 5 + 2; 7 + 4 + 3 + 1. Решение. Суммарный вес гирек равен 45, поэтому в каждой коробочке суммарный вес гирек равняется 15 г.

6.2. Ответ. Борис. Решение. Так как мальчик дал три разных ответа, он хотя бы два раза соврал. Поэтому два дня из трёх, когда мальчику задавали вопросы, пришлись на нечётные числа. Поскольку чётные и нечётные числа месяца чередуются, это должны были быть первый и третий дни. Стало быть, второй день пришёлся на чётное число. В этот день мальчик и назвал своё настоящее имя.

6.3. Ответ. Мышь – 140г, сыр – 10г, мышонок – 30г. Решение. Из условия следует, что удвоенный вес мыши равен 180 + 100 = 280г. Поэтому вес мыши равен 140г. Тогда мышонок и сыр вместе весят 180 – 140 = 40г. А вес сыра, согласно условию, равен четверти этого веса.

6.4. Решение. Два способа сделать это показаны на рис. 1. Есть и другие способы.

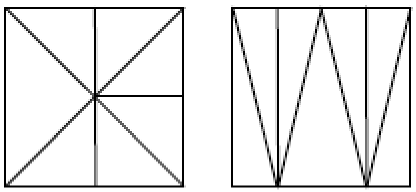


Рис. 1

6.5. Решение. Разобьем палочки на три группы: от 1 до 8, от 9 до 16, от 17 до 24. В каждой группе первую палочку соединим с последней, вторую – с предпоследней, третью – с третьей с конца, оставшиеся две палочки тоже соединим. Получим в каждой группе по четыре одинаковых палки, из которых сложим квадрат. Стороны полученных квадратов: 9, 25, 41. Замечание. Есть и другие способы сложить три квадрата.

Ответы,решения, указания 7 класс

7.1. Ответ. 6. Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

7.2. Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: $12 = 6 + 6$. Получили искомое количество гвоздей: $19 = 13 + 6$.

7.3. Ответ. 1, 3, 5, 10. Решение. В сумме $9 + 14 + 16 + 18 = 57$ вес каждого орешка сосчитан трижды, значит, суммарный вес всех орешков равен 19 г. Разность $19 – 9 = 10$ – это вес одного из орешков. Аналогично находим веса остальных орешков.

7.4. Ответ. 400. Решение. Сумма длин короткой и длинной сторон прямоугольника равна 20. Но эта сумма равна стороне исходного квадрата.

7.5. Ответ. Нельзя. Первое решение. Допустим, можно. Возьмём красный шарик, не лежащий с краю (такой найдётся хотя бы в пятёрке шариков со 2-го по 6-ой). Соседние с ним шарики должны быть белыми, иначе найдутся два соседних шарика, среди которых нет белых. Но это значит, что мы нашли три подряд идущих шарика, среди которых нет синего. Второе решение. Разбив 30 шариков на 15 пар соседних шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 15 белых. Разбив их на 10 троек подряд идущих шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 10 синих. Наконец, разбив их же на 6 пятёрок подряд идущих шариков, видим, что среди выложенных шариков не меньше 6 красных. Получается, что шариков должно быть не меньше, чем $15 + 10 + 6 = 31$, а их только 30.

Ответы,решения, указания 8 класс

8.1. Ответ. 49 рублей 50 копеек. Решение. Пусть вначале у Васи было x рублей. Из условия задачи получаем, что $x + 49 = 99x$. Решая это уравнение, получаем $x = 0{,}5$ рубля = 50 копеек.

8.2. Ответ. 70. Первое решение. Склеим все бревна в одно 100-метровое бревно. Чтобы его разделить на 100 частей, нужно сделать 99 распилов, из которых 29 уже было сделано. Второе решение. Если было m трехметровых и n четырехметровых бревен, то $m + n = 30$, $3m + 4n = 100$, откуда $m = 20$, $n = 10$. Поэтому нужно сделать $20\cdot 2 + 10\cdot 3 = 70$ распилов.

8.3. Ответ. $a = 2$. Первое решение. Заметим, что при $x = 1$ выполняется $ax + 1 = x + a = a + 1$, так что точка M $(1; a + 1)$ является общей для прямых $y = ax + 1$ и $y = x + a$. Так как прямые различны, M – их единственная общая точка. Поэтому прямая $y = 3$ тоже должна проходить через неё, откуда $a + 1 = 3$ и $a = 2$. Легко видеть, что при $a = 2$ все три прямые действительно различны. Второе решение. По условию в точке пересечения $a x + 1 = x + a$

$\leftrightarrow$ (a – 1)(x – 1) = 0, откуда a = 1 или x = 1. Но случай a = 1 невозможен, потому что тогда первые две прямые совпадали бы. Дальше рассуждаем как в первом решении.

8.4. Ответ. 90°, 60°, 30°. Решение. Угол ADB = 180° – угол ADC = 60°. Тогда угол ABD = 60°. Значит, треугольник ABD – равносторонний. Откуда AD = BD = DC. То есть треугольник ADC – равнобедренный. Значит, угол DAC = углу DCA = 30°. Следовательно, угол BAC = 90°.

8.5. Ответ. 1003. Решение. Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т. е. среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей, т. е. всего в шеренге не более 1002 + 1 = 1003 рыцарей. Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

<u>Ответы,решения, указания 9 класс</u>

9.1. Ответ. Уменьшится на 2013. Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1)=xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть x-y-1=2011 или y-x=2012. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1)=xy-y+x-1$. Заметим, что $xy-y+x-1=xy-(y-x)-1=xy-2012-1=xy-2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

9.2. Решение. Один из вариантов следующий. Первые четыре дня Вася должен покупать товар на все имеющиеся у него деньги. Тогда через четыре дня у него будет 16 000 рублей (1000 → 2000 → 4000 → 8000 → 16 000). На пятый день он должен купить товар на 9 000 рублей. У него останется 7 000 рублей. После обеда он продаст товар за 18 000 рублей, и у него станет ровно 25 000 рублей.

9.3. Ответ. 0. Решение. Докажем, что выражение, стоящее по крайней мере в одной из скобок, равно нулю. Выражение, стоящее в первой скобке, принимает нулевое значение, если x и y одного знака. Аналогично для второй и третьей скобок. Но среди ненулевых чисел x, y и z обязательно найдутся либо два положительных числа, либо два отрицательных. А значит, хотя бы один из трех множителей равен нулю. Поэтому все произведение равно нулю.

9.4. Ответ. Вася. Решение. После каждого забега разность количества конфет, полученных любыми двумя из присутствовавших на уроке школьников, делится на 3 (эта разность равна 0 или 3). Значит, и в конце четверти разность количеств конфет, полученных любыми двумя из посетивших все уроки физкультуры школьников, делится на 3. А из данных чисел 29, 32, 37 разность, делящуюся на 3, дают только числа 29 и 32. Значит, пропустил урок тот школьник, который заработал 37 конфет.

9.5. Решение. Пусть AD и CE – высоты треугольника ABC, O – точка их пересечения (см. рис. 3). Из того, что в прямоугольном треугольнике AOE угол AOE равен 60°, следует, что

OE = AO/2, т. е. OE = OD. Значит, прямоугольные треугольники OEB и ODB равны (BO – общая гипотенуза). Тогда BE = BD, откуда следует, что угол ABD = углу CBE (угол ABC – общий). Отсюда AB = BC. С другой стороны, угол ABC = 90° – угол BAD = угол AOE = 60°. Значит, треугольник ABC равносторонний.

Ответы,решения, указания 10 класс

10.1. При $a \geq -1$ неравенство приводим к виду $(a-1)^2 \geq 0$, а при $a < -1$ – к виду $a^2 + 3 \geq 0$.

10.2. Ответ. Коля. Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечётные, а второе – чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

10.3. Ответ. (0;0), (1;1), (–1;–1), (2;3), (–2;–3). Решение. Поскольку каждое из слагаемых – неотрицательное число, то либо оба они равны 0, либо среди них одно равно 0, а другое – единице. В результате получим пять случаев линейных систем:

1) $\begin{cases} y - x = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ 2), 3) $\begin{cases} y - x = 0 \\ 3x - 2y = \pm 1 \end{cases}$ 4), 5) $\begin{cases} y - x = \pm 1 \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

Каждая система дает свое решение.

10.4. Решение. Из параллельности следует, что угол AEF= углу, FED= углу AFE (см. рис. 4). Значит, треугольник AEF – равнобедренный: AF = AE . Значит, биссектриса угла EAF является медианой и высотой треугольника AEF , то есть серединным перпендикуляром к стороне EF . Аналогично, биссектриса угла DCF является серединным перпендикуляром к стороне DF . Центр окружности, вписанной в треугольник ABC – это точка пересечения упомянутых биссектрис, а центр окружности, описанной около EDF – это точка пересечения упомянутых серединных перпендикуляров. Значит, эти точки совпадают.

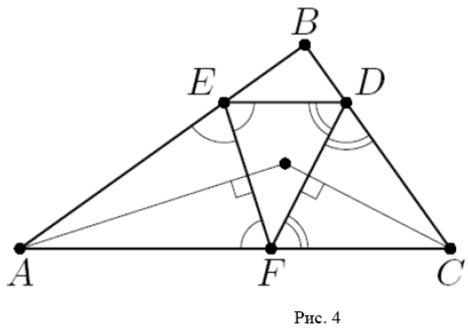


Рис. 4

10.5. Ответ. –3. Решение. Заметим, что произведение этих чисел равно –1. Действительно,

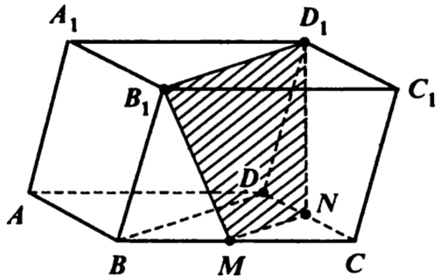
$$\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}=\frac{a^2-(a^2+4b^2)}{(2b)^2}=\frac{-4b^2}{4b^2}=-1.$$

Но тогда второе число равно -3.

Ответы,решения, указания 11 класс

11.1.Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение – трапеция.

Решение. По условию задачи точка N – середина DC.



Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем BD, $BD \parallel B_1D_1$.

Из точки N проводим $MN \parallel BD$, значит $MN \parallel B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M, D_1 и N, тогда B_1D_1NM – искомое сечение. Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \parallel NM$, значит B_1D_1NM – трапеция (по определению).

11.2.Найдите все решения уравнения: $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.

Решение. $x^2+5y^2+4xy+2y+1=x^2+4xy+4y^2+y^2+2y+1=(x+2y)^2+(y+1)^2$

$(x+2y)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow x=2;\ y=-1.$

Ответ: $x=2;\ y=-1.$

11.3.Вычислить без таблиц: $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$.

Решение. Поскольку $\sin a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, то

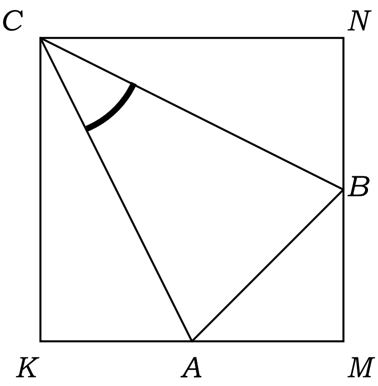
$$\sin\frac{5\pi}{16}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}\right)=\cos\frac{3\pi}{16},$$

$\sin\frac{7\pi}{16}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{16}\right)=\cos\frac{\pi}{16}$, имеем:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=$$
$$=\left(\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}\right)+\left(\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}\right)=$$
$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}+$$
$$+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)^2-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}=$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(4\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}\right)+1-\frac{1}{2}\left(4\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)=$$
$$=2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}=1-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=$$
$$=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=2-0,5=1,5.$$

Ответ: 1,5.

11.4. В квадрате *KCNM* на серединах сторон *KM* и *MN* отмечены точки *A* и *B*, которые соединены с вершиной *C*. Найти $\angle ACB$.



Решение. Пусть сторона квадрата – $2a$, тогда $CN=2a$, $BN=a$, $CB=CA=a\sqrt{5}$, $AB=a\sqrt{2}$. В равнобедренном треугольнике по теореме косинусов найдем косинус угла *ACB*.

$$\cos\angle ACB=\frac{\left(a\sqrt{5}\right)^2+\left(a\sqrt{5}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\left(a\sqrt{5}\right)^2}=\frac{8a^2}{10a^2}=0,8.$$

Следовательно, $\angle ACB=\arccos 0,8$.

Ответ: $\arccos 0,8$.

11.5. Найти значение выражения: $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$ при $a=2003$.

Решение.

$$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)=$$
$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)=$$
$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)=$$
$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)=$$
$$=\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)=1-a,$$

Если $a=2014$, то $1-a=1-2014=-2013$.

Ответ: –2013.