

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
5 класс

- 5.1.** На уроке физкультуры мальчики построились в шеренгу. Потом между каждыми двумя мальчиками встала девочка. Всего в шеренге оказалось 25 детей. Сколько мальчиков стояло в шеренге?
- 5.2.** Составьте из восьми различных ненулевых цифр 4 двузначных числа таких, что сумма двух из них была равна сумме двух других.
- 5.3.** В кастрюлю необходимо налить 4 л воды. У хозяйки имеется только два сосуда: один на 5 литров, другой – на 3 литра. Как поступить хозяйке?
- 5.4.** Если Сергей купит 15 тетрадей, то у него останется 72 рубля, если же 20 тетрадей, то у него не хватит 8 рублей. Сколько денег у Сергея?
- 5.5.** Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел от 10 до 25?

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019– 2020 учебный год
6 класс

- 6.1.** Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?
- 6.2.** Мальчик по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда врёт. Как-то его три ноябрьских дня подряд спрашивали: «Как тебя зовут?». На первый день он ответил: «Андрей», на второй: «Борис», на третий: «Виктор». Как зовут мальчика? Объясните, как вы рассуждали.
- 6.3.** Мышь, мышонок и сыр вместе весят 180 г. Мышь весит на 100г больше, чем мышонок и сыр вместе взятые. Сыр весит в три раза меньше, чем мышонок. Сколько весит каждый из них? Ответ нужно подтвердить вычислениями.
- 6.4.** Как разрезать квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых?
- 6.5.** Есть 24 палочки. Длина первой палочки – 1 см, второй – 2 см, ..., двадцать четвёртой – 24 см (длина каждой следующей палочки на 1 см больше длины предыдущей). Как, используя все эти палочки, составить три различных квадрата? Ломать палочки нельзя, каждая палочка должна входить только в один квадрат.

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
7 класс

- 7.1.** К Васе пришли его одноклассники. Мама Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?
- 7.2.** В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?
- 7.3.** У Пети есть четыре орешка. Он всеми возможными способами брал по три орешка и взвешивал их на весах. Получилось 9 г, 14 г, 16 г и 18 г. Сколько весил каждый орешек? Требуется найти все решения задачи и доказать, что других нет.
- 7.4.** Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (чёрного) и четырех равных белых прямоугольников (см. рис. 2). Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Найдите площадь чёрного квадрата.

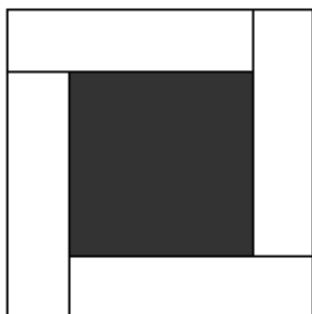


Рис. 2

- 7.5.** Можно ли выложить в ряд 30 шариков – белых, синих и красных – так, чтобы среди любых двух идущих подряд шариков был хотя бы один белый, среди любых трёх идущих подряд – хотя бы один синий, а среди любых пяти идущих подряд – хотя бы один красный? Ответ объясните.

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
8 класс

8.1. У Васи в кошельке лежало немного денег. Вася положил в кошелек еще 49 рублей, и сумма денег в кошельке увеличилась в 99 раз. Сколь денег стало у Васи в кошельке?

8.2. Имеется 30 бревен длинами 3 и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаны длиной 1 м? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.)

8.3. Число a таково, что прямые $y = ax + 1$, $y = x + a$ и $y = 3$ различны и пересекаются в одной точке. Каким может быть a ?

8.4. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Найдите углы треугольника ABC , если угол $ADC = 120^\circ$, угол $DAB = 60^\circ$.

8.5. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
9 класс

9.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

9.2. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продает купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него была 1000 рублей?

9.3. Даны ненулевые числа x , y и z . Чему может равняться значение выражения

$$\left(\frac{x}{|y|} - \frac{|x|}{y}\right) \cdot \left(\frac{y}{|z|} - \frac{|y|}{z}\right) \cdot \left(\frac{z}{|x|} - \frac{|z|}{x}\right)?$$

9.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

9.5. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60° , и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

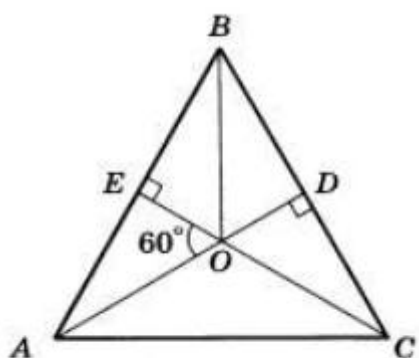


Рис. 3

Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
10 класс

10.1. Докажите неравенство $|a + 1| \leq a^2 - a + 2$.

10.2. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

10.3. Найдите все целочисленные пары (x, y) , удовлетворяющие неравенству $|y - x| + |3x - 2y| < 2$.

10.4. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $AC \parallel DE$. Оказалось, что биссектрисы углов AED и EDC пересекаются в точке F , лежащей на стороне AC . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , является центром окружности, описанной около треугольника EDF .

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b} = \frac{1}{3}. \text{ Найдите } \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b}.$$

10.5. Числа a и b подобраны так, что

Задачи математической олимпиады
Школьный этап
2019 – 2020 учебный год
11 класс

11.1. Построить сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD . Доказать, что построенное сечение – трапеция.

11.2. Найдите все решения уравнения: $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$.

11.3. Вычислить без таблиц: $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

11.4. В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B , которые соединены с вершиной C . Найти угол ACB .

11.5. Найти значение выражения:

$$(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[8]{a})(1 + \sqrt[16]{a})(1 + \sqrt[32]{a})(1 - \sqrt[32]{a}) \text{ при } a = 2014.$$